Zinsrechnung

Verschiedene Verzinsungsverfahren

Problemstellung – worum geht es in diesem Kapitel?

- Häufig auftretende Fragestellung:
  - Wenn man heute einen Betrag X anlegt, wie viel hat man dann nach Ablauf eines gewissen Zeitraums, etwa fünf Jahren?
  - Welchen Geldbetrag muss man heute anlegen, um in einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt einen vorgegebenen Betrag X zu erhalten?
- Die Antwort auf diese einfachen Fragen hängt von den Verzinsungskonditionen und –Verfahren ab.

Ein einfaches Beispiel

- Anlage von 1.000 Euro auf einem Tagesgeldkonto zu 4,75% pro Jahr.
- Wie viel Geld hat man nach einem Jahr, wenn zwischenzeitlich keine weiteren Ein- oder Auszahlungen mehr stattfinden?
- Wie viel Geld könnte man alternativ nach 3 Monaten oder nach einem halben Jahr abheben?

Beispiel – Anlage für ein Jahr

- Beginn des Jahres: -1.000 Euro (Anlage)
- Ende des Jahres:
  - Zunächst erhält man den angelegten Betrag wieder:
    - + 1.000 Euro
  - Zudem erhält man:
    - 0,0475 * 1.000 = 47,50 Euro
  - Insgesamt:
    - 1.047,50 Euro

Interpretation des Zinssatzes

- Der Zins lässt sich als Gebühr für die temporäre Überlassung von Kapital interpretieren.
- Er entschädigt den Kapitalgeber für den vorübergehenden Verzicht auf seine Mittel.
- Dabei wird die Höhe der Zinszahlung abhängig von der Dauer der Überlassung sein.

Beispiel – Anlage für drei Monate (1)

- Beginn des Jahres: -1.000 Euro (Anlage)
- Nach drei Monaten:
  - Erneut erhält man den angelegten Betrag wieder:
    - + 1.000 Euro
  - Zudem erhält man eine Zinszahlung:
    - Der Zinssatz von 4,75% bezieht sich jedoch auf ein ganzes Jahr.
    - Die Zinszahlung wird entsprechend geringer ausfallen.
    - Die Details dieser Anpassung hängen von der Art der Verzinsung ab.

Lineare Verzinsung

- Bei der linearen Verzinsung sind die Zinszahlungen (Z) proportional zu:
  - dem angelegten Betrag K_0
  - dem Kapitalbindungsdauer ΔT
- Der Zinssatz r ist dabei die Proportionalitätskonstante.
- Mathematisch:

$$Z = r * \Delta T * K_0$$

Beispiel – Anlage für drei Monate (2)

- Im Beispiel:
  - $r=4{,}75\%$
  - $\Delta T= 0{,}25$ Jahre (3 Monate)
  - $K_0 = 1.000$ Euro
  - Zinszahlung:

    $Z = r^* \Delta T^* K_0$

    $= 0{,}0475*0{,}25*1.000$

    $= 11{,}875 \approx 11{,}88$ Euro

Dimension des Zinssatzes (1)

- Welche Dimension hat der Zinssatz?
  - Das Ergebnis Z hat die Dimension „Geldeinheiten“, [GE], also etwa Euro oder US-Dollar.
  - K_0 hat ebenfalls die Dimension [GE]
  - ΔT hat die Dimension „Zeiteinheiten“ [Zeit], hier gemessen in Jahren.

Dimension des Zinssatzes (2)

- Einsetzen in die Gleichung:

  $Z = r \; * \; \Delta T \; * \; K_0$

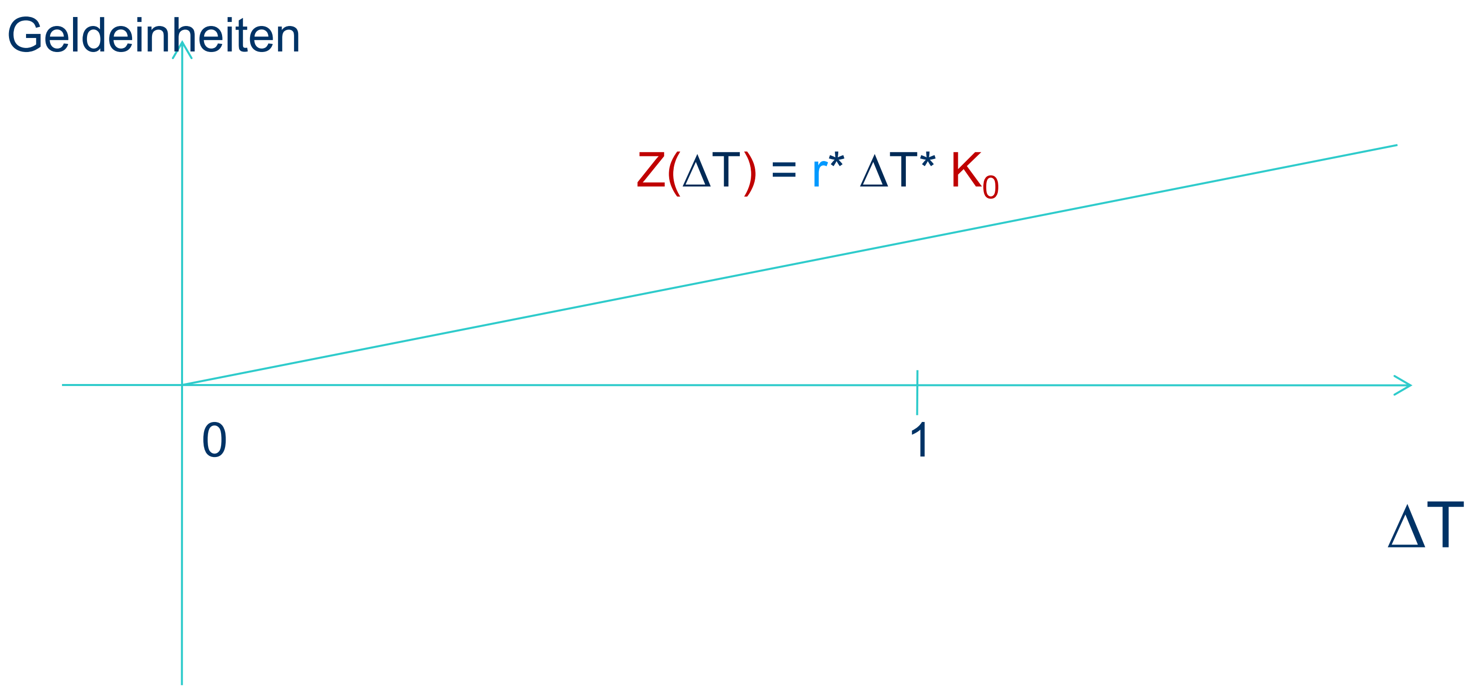
  $[GE] = [?] \; * [Zeit] \; * \; [GE]$

- Ergebnis:

  $[?] = [1/Zeit]$

- Der Zinssatz hat somit die Dimension [1/Zeit]
  - Anmerkung: Die Zeit muss nicht notwendigerweise in Jahren gemessen werden, jedoch ist dies der häufigste Fall.
  - Für „pro Jahr“ wird die Abkürzung „p.a.“ verwendet (lat.: „per annum“).

Graphische Darstellung: Zinsen bei linearer Verzinsung



Entwicklung des Kapitals bei linearer Verzinsung

- Es gilt:

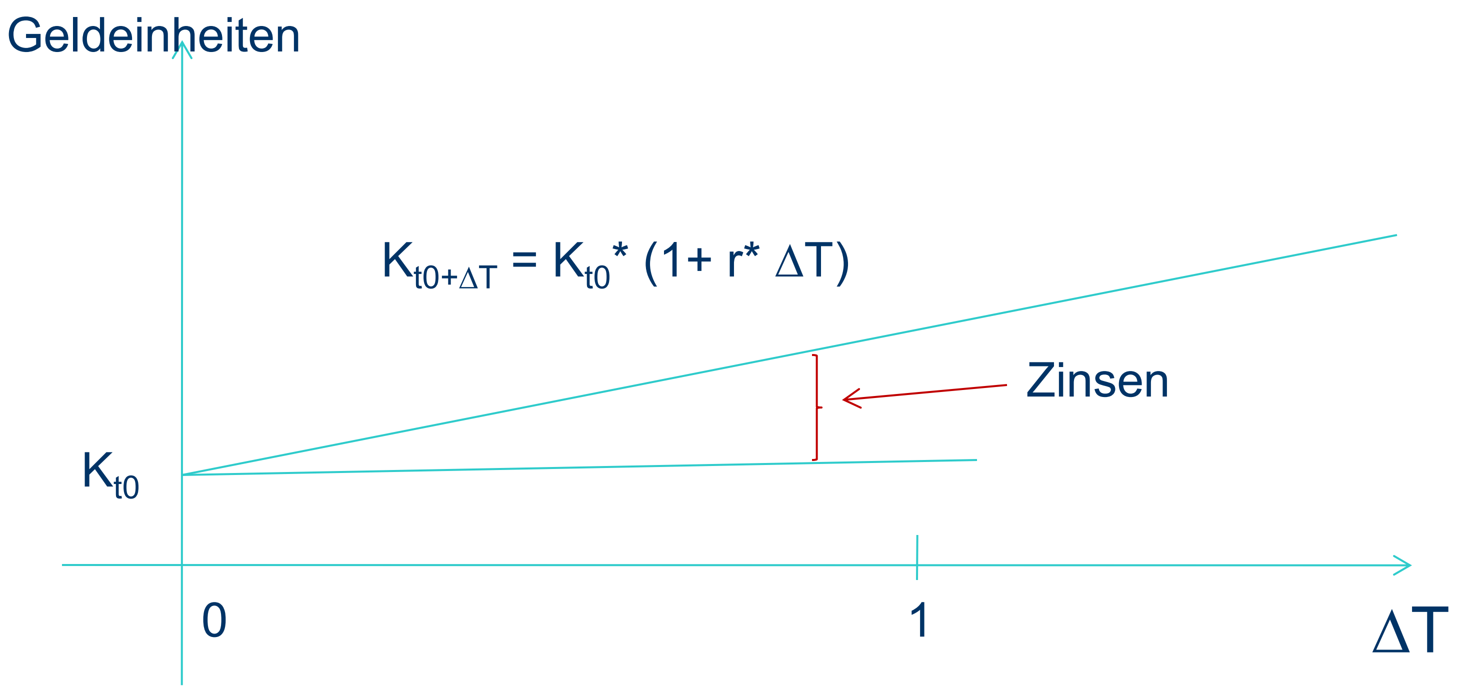
$$K_{t0+\Delta T} = K_{t0} + Z(\Delta T)$$

- Verbal:
  - Das Kapital im Zeitpunkt $t0+\Delta T$ setzt sich zusammen aus
    - dem eingesetzten Kapital K_{t0}
    - und den im Intervall ΔT angefallenen Zinszahlungen.

- Konkretisierung:

$$\begin{aligned} K_{t0+\Delta T} &= K_{t0} + Z(\Delta T) \\ &= K_{t0} + r^* \Delta T^* K_{t0} \\ &= K_{t0}^* (1+ r^* \Delta T) \end{aligned}$$

Graphische Darstellung: Kapitalentwicklung bei linearer Verzinsung



Anmerkung: Standardisierung der Zeitintervalle

- Im Bankwesen und in der Finanzmathematik werden die Zeitintervalle wie folgt standardisiert:
  - 1 Monat = 30 Tage
  - 1 Quartal = 90 Tage
  - 1 Halbjahr = 180 Tage
  - 1 Jahr = 360 Tage

Aufgabe: lineare Verzinsung

- Welchen Gesamtbetrag erhält man:
  - bei <u>linearer Verzinsung</u>
  - bei Anlage von 200 Geldeinheiten
  - zu Beginn des Jahres
  - bei einem Zinssatz von 7% p.a.
    - nach einem halben Jahr?
    - nach eineinhalb Jahren?
    - nach einem Jahr und acht Monaten?
    - nach fünf Jahren?

Zinseszinsen: Verzinsung der Zinsen (I)

- Sofern die Zinsen nicht regelmäßig entnommen werden, steigt das Kapital des Kapitalgebers kontinuierlich an.
- Entsprechend ist es ökonomisch sinnvoll,
  - dass nicht nur für die Überlassung des Anfangskapitals, …
  - sondern auch für die Überlassung der bereits angelaufenen Zinsen …
  - selbst wieder Zinsen verlangt werden.

Zinseszinsen: jährlicher Zinszuschlag (II)

- Zinsansprüche werden in regelmäßigen Abständen dem Kapital zugeschlagen.
- Üblicherweise geschieht dies jeweils am Ende des Jahres.

Zinseszinsen: jährlicher Zinszuschlag (III)

- Innerhalb eines Jahres wird also weiterhin linear verzinst.

  $K_t = K_0 * (1+t*r), \qquad t \leq 1$

- Ab dem Beginn des nächsten Jahres
  - wird dann das verzinste Kapital am Ende des ersten Jahres, K_1,
  - bei der weiteren (linearen) Verzinsung zugrunde gelegt.

    $K_t = K_1 * (1+r*[t-1]) \quad 1 < t \leq 2$

Zinseszinsen: Beispiel (1)

- Anlage von 1.000 Euro, r= 4,75% p.a., Anlage für 2,5 Jahre, Anlagezeitpunkt = Beginn Januar.
- Ergebnis:
- $K_{2,5} = 1.000 * 1,0475^2 * (1+0,5*0,0475)$

  $\approx 1.123,32$

Zinseszinsen: Beispiel (2)

- Herleitung:
  - Kapital nach einem Jahr:
    - $K_1 = K_0*(1+r)$
  - Kapital nach zwei Jahren:
    - $K_2 = K_1*(1+r)$
  - Kapital nach 2,5 Jahren (ΔT_2=0,5):
    - $K_{2,5} = K_2*(1+ \Delta T_2*r)=K_2*(1+ 0{,}5*r)$

Zinseszinsen: Beispiel (3)

- Bestimme den Zusammenhang zwischen $K_{2,5}$ und K_0 direkt:

  $K_{2,5} = K_2*(1+ 0,5*r)$

  $= [K_1*(1+r)]*(1+0,5*r)$

  $=[K_0*(1+r) *(1+r)]*(1+ 0,5*r)$

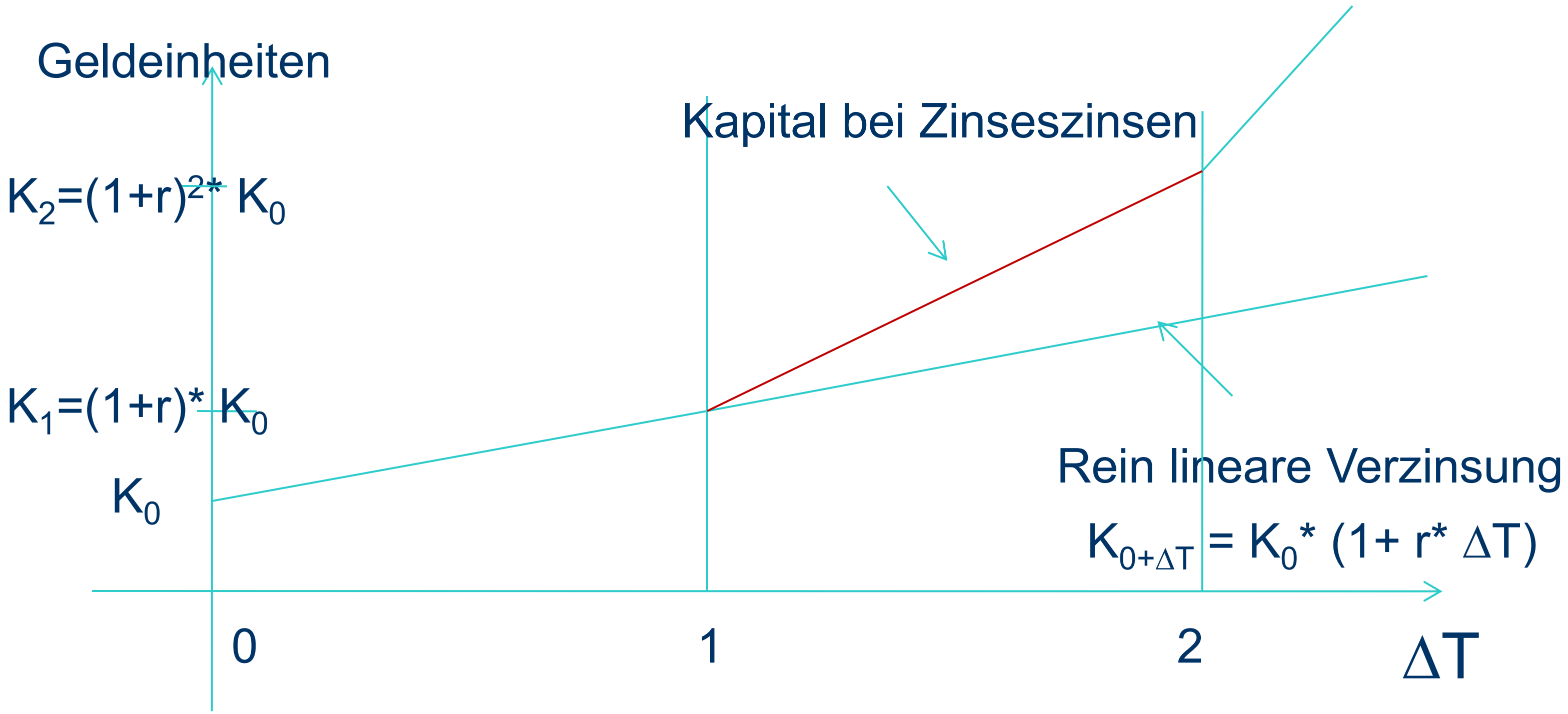
  $=K_0*(1+r)^2*(1+ 0,5*r)$

Zinseszinsen: Formel für den Spezialfall ganzer Jahre

- Bei Anlagebeginn zu Beginn eines Jahres und einer Anlage über T Jahre (T ist eine natürliche Zahl) zum Zinssatz r erhält man als Endkapital:

$$K_T = (1+r)^T * K_0$$

Graphische Darstellung: Kapital bei linearer Verzinsung und bei Zinseszinsen



Aufgabe: Zinseszinsrechnung mit jährlichem Zinszuschlag

- Welchen Betrag erhält man:
  - bei Zinseszinsrechnung mit jährlichem Zinszuschlag
  - bei Anlage von 200 Geldeinheiten
  - zu Beginn des Jahres
  - bei einem Zinssatz von 7% p.a.
    - nach einem halben Jahr?
    - nach eineinhalb Jahren?
    - nach einem Jahr und acht Monaten?
    - nach fünf Jahren?

Zinseszinsrechnung bei unterjähriger Verzinsung

- Bisher hatten wir angenommen,
  - … dass die Zeit in Jahren gemessen wird
  - … dass die Zinsen dem Kapital am Ende jedes Jahres zugeschlagen werden.
- Prinzipiell ist es jedoch ohne Probleme möglich, einen Zinssatz pro Monat, Woche oder Tag zu definieren und den Zinszuschlag entsprechend vorzunehmen.

Unterjährige Verzinsung: Monatszinsen

- Beispiel: r_M =0,4% pro Monat, Anlage von 100 Geldeinheiten zu Beginn des Jahres.
  - Kapital Ende Januar: 100*(1+0,004) = 100,4
  - Kapital Ende Februar: 100,4*(1+0,004) = 100,80
  - …
  - Kapital Ende Dezember:

$$100*(1+0,004)^{12} = 104,90$$

Anmerkung: „nomineller“ und „relativer“ Zinssatz

- Häufig wird auch bei unterjähriger Verzinsung der Zinssatz als Zinssatz pro Jahr ausgedrückt („nomineller Zinssatz“).
- Beispiel:
  - Es wird ein Zinssatz 4,9% p.a. bei monatlichem Zinszuschlag ausgewiesen.
  - Den gesuchten Zinssatz pro Monat erhält man dann, indem man das theoretisch korrekte Modell verwendet („relativer Zinssatz“):

$$0{,}4\% \text{ pro Monat} = (1+4{,}9\% \text{ p.a.})^{\frac{1}{12}} - 1$$

Aufgabe: Zinseszinsrechnung mit monatlichem Zinszuschlag

- Welchen Betrag erhält man:
  - bei <u>Zinseszinsrechnung mit monatlichem Zinszuschlag</u>
  - bei Anlage von 200 Geldeinheiten
  - zu Beginn des Jahres
  - bei einem Zinssatz von 0,57% <u>pro Monat</u>.
    - nach einem halben Jahr?
    - nach eineinhalb Jahren?
    - nach einem Jahr und acht Monaten?
    - nach fünf Jahren?

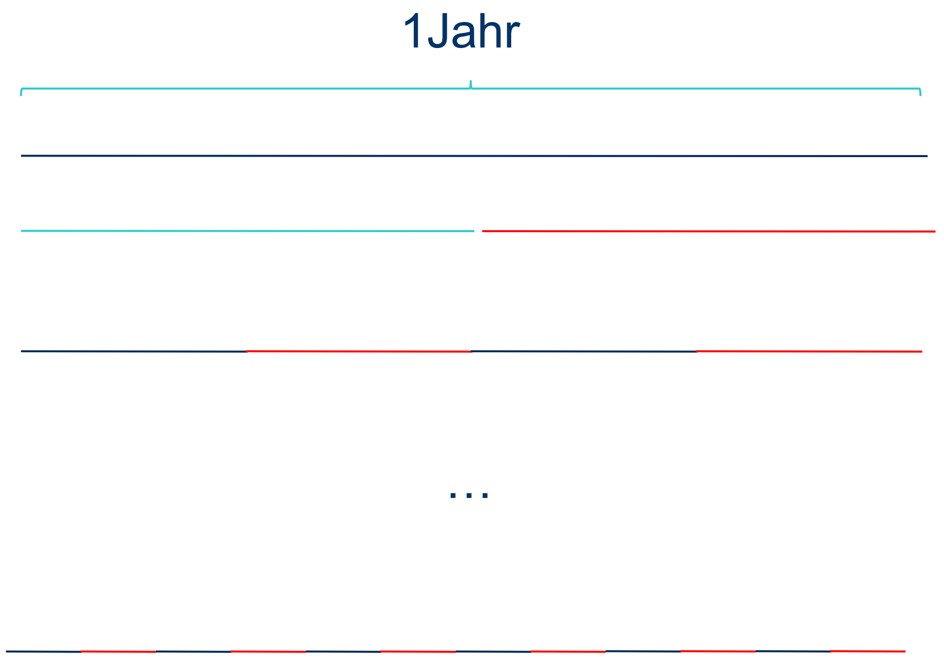
Unterjährige Verzinsung: Überblick

- Kapital am Ende eines Jahres bei:
  - Zins pro Tag:
    - $K^{TV}_{Jahresende} = K_0 * (1 + r_{Tag})^{360}$
- Zins pro Monat:
    - $K^{MV}_{Jahresende} = K_0 * (1 + r_{Monat})^{12}$
- Zins pro Jahr:
    - $K^{JV}_{Jahresende} = K_0 * (1 + r_{Jahr})$

Stetige Verzinsung (I)

- Nun nehmen wir an, dass
  - die Zeit in Jahren gemessen wird …
  - … die Zinsen am Ende jeder Periode mit Länge von 1/n Jahren dem Kapital zugeschlagen werden.
  - Beispiele:
    - n=1: jährlicher Zinszuschlag
    - n=12: monatlicher Zinszuschlag
    - n=360: täglicher Zinszuschlag

Intervallbildung: Graphik



Intervalllänge:

1 Jahr (n=1)

1/2 Jahre (n=2)

Quartal (n=4)

1/n Jahre

Stetige Verzinsung (II)

- Am Ende der ersten Periode erhält man (Zinssatz ρ pro Jahr):
  - $K_{t1} = K_{t0}*(1+1/n*\rho)$
- Begründung:
  - Innerhalb jeder Periode wird erneut linear verzinst.
  - Da die Periode eine Länge von $\Delta T=1/n$ Jahren hat, fallen Zinsen in folgender Höhe an:

$$K_{t0}*\Delta T*\rho$$
$$= K_{t0}*(1/n)*\rho$$

Stetige Verzinsung (III)

- Am Ende der m-ten Periode erhält man:

  $K_{tm} = K_{t0}*(1+1/n*\rho)^m$

- Beispiel: n=12, m=7, ρ =5% pro Jahr
  - $K_{Ende\ Juli} = K_0*(1+1/12*0{,}05)^7$
- Nach n-Perioden ist genau ein Jahr vergangen:
  - $K^n_{Jahresende} = K_{t0}*(1+1/n*\rho)^n$

Stetige Verzinsung (IV)

- $K^n_{Jahresende} = K_{t0}*(1+1/n*\ \rho)^n$
- Idee:
  - Man verkürzt nun die Periodenlänge 1/n immer weiter, indem man n beliebig vergrößert.
  - Betrachte also den Grenzwert für $n \to \infty$
- Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} (1+1/n*\rho)^n = \exp(\rho)=e^{\rho}$$

- Somit:

$$K^{St.Verz}_{Jahresende} = K_{t0} * \exp(\rho)$$

Stetige Verzinsung (V)

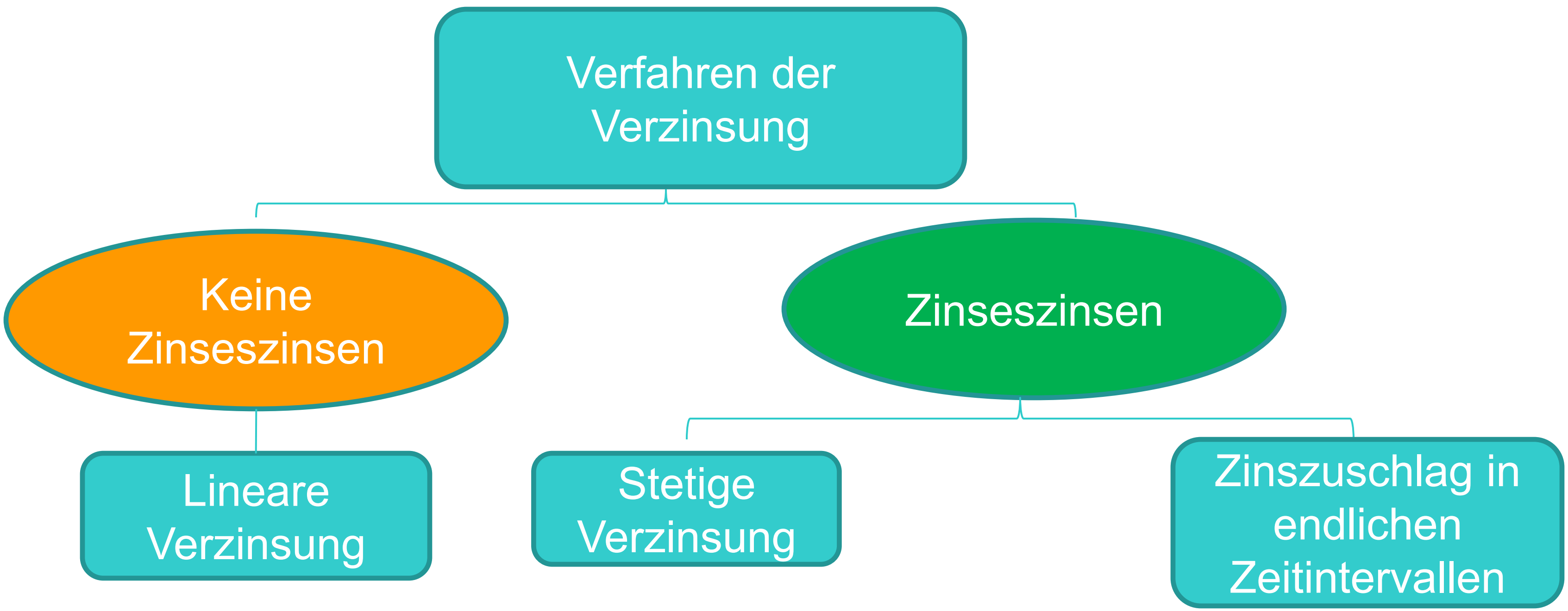
- Bei einer Laufzeit von T Jahren, einem Zinssatz von ρ pro Jahr und stetiger Verzinsung erhält man allgemein:

$$K_T = K_0 * \exp(\rho * T)$$

Aufgabe: Zinseszinsrechnung mit stetiger Verzinsung

- Welchen Betrag erhält man:
  - bei Zinseszinsrechnung mit stetiger Verzinsung
  - bei Anlage von 200 Geldeinheiten
  - zu Beginn des Jahres
  - bei einem Zinssatz von 7% pro Jahr.
    - nach einem halben Jahr?
    - nach eineinhalb Jahren?
    - nach einem Jahr und acht Monaten?
    - nach fünf Jahren?

Verzinsungsarten – zusammenfassender Überblick



Täglich, monatlich, jährlich, etc.

$K_T = K_0 * (1 + r * T)$ $K_T = K_0 * \exp(\rho * T)$ $K_{Tn} = K_0 * (1 + r)^n$

Anmerkung

- Im weiteren Verlauf der Veranstaltung werden wir, soweit nicht ausdrücklich anders erwähnt, die Zinseszinsrechnung mit jährlichem Zinszuschlag verwenden.

Exkurs: Arbitragefreiheit

- Berücksichtigung von No-Abitrage:
  - $K^{TV}_{Jahresende} = K^{MV}_{Jahresende} = K^{JV}_{Jahresende}$
  - $(1+r_{Tag})^{360} = (1+r_{Monat})^{12} = (1+r_{Jahr})$
- Umrechnung der Zinssätze für die verwendete Haltedauer:

$$r_{Tag} = (1+r_{Jahr})^{\frac{1}{360}} - 1$$

$$r_{Monat} = (1+r_{Jahr})^{\frac{1}{12}} - 1$$

*$\rho = \ln(1+r_{Jahr})$