Kapitel 3 – klassische Investitionsrechnung

Problemstellung – worum geht es in diesem Kapitel?

- Mit dem Kapitalwert haben wir ein sinnvolles Verfahren zur Beurteilung von Investitionsobjekten kennengelernt.
- Es gibt darüberhinaus eine Reihe „klassischer“ Verfahren.
- Diese sind zwar nur unter restriktiven Bedingungen anwendbar oder gleich völlig sinnlos, man sollte sie aber trotzdem kennen.

Klassische Investitionsrechnung

- Verfahren der klassischen Investitionsrechnung:
  1. Auf einer so genannten „flachen Zinsstruktur“ basierende Verfahren
     - Klassischer Kapitalwert
     - Klassischer Endwert
     - Klassische Annuität
  2. Eher unsinnige Verfahren
     - Der interne Zinfuß/Zinssatz
     - Die Pay-Off-Periode

Kapitel 3, erster Teil

Auf einer flachen Zinsstruktur basierende Verfahren

Allgemeine Formeln für Barwert und Kapitalwert

- Die allgemeine Formel für den Barwert lautete:

$$BW = Z_1/(1+i_1)+ Z_2/(1+i_2)^2+ \ldots+Z_T/(1+i_T)^T$$

- Die allgemeine Formel für den Kapitalwert lautete:

$$KW= Z_1/(1+i_1)+ Z_2/(1+i_2)^2+ \ldots+Z_T/(1+i_T)^T - A_0$$

- Beide Formeln sind abhängig von den (üblicherweise verschiedenen) Zinssätzen i_1, $i_2,\ldots,i_T$.

Spezialfall: flache Zinsstruktur

- Von einer „flachen Zinsstruktur“ spricht man, wenn die Zinssätze i_1, $i_2,\ldots,i_T$ alle identisch sind:

  $$i_1=i_2=\ldots=i_T=i$$

- Vorteil:
  - Man kann leichter rechnen und erhält einige schöne Formeln.
- Nachteil:
  - Eine flache Zinsstruktur kommt in der Realität selten vor, so dass die Formeln wenig nützlich sind.

Klassischer Barwert

- Klassischer Barwert beim Zins i:

$$BW(i) = Z_1/(1+i)+ Z_2/(1+i)^2+ \ldots+Z_T/(1+i)^T$$

Klassischer Kapitalwert

- Klassischer Kapitalwert beim Zins i:

  $KW(i) = -A_0 + Z_1/(1+i) + Z_2/(1+i)^2 + \ldots + Z_T/(1+i)^T$

Klassischer Kapitalwert als Entscheidungskriterium

- Bei mehreren <u>konkurrierenden</u> Investitionsobjekten:
  - Wähle das IO mit dem höchsten positiven Kapitalwert.
- Bei mehreren <u>kombinierbaren</u> Investitionsobjekten:
  - Führe alle IOs mit positivem Kapitalwert durch.

Aufgabe

- (Aufgabensammlung)

Der klassische Endwert (1)

- Beim (klassischen) Kapitalwert wird ein IO in t=0 mit der festverzinslichen Anlage/Kreditaufnahme verglichen.
- Der (klassische) Endwert vergleicht ein IO in t=T mit der festverzinslichen Anlage/Kreditaufnahme.
- Idee:
  - Finanziere die Anfangsauszahlung A_0 über einen Kredit, der in t=T fällig wird.
  - Lege alle Zahlungen Z_t bis zum Zeitpunkt T an.

Der klassische Endwert (2)

- Ergebnis in T:
  - Rückzahlung des Kredits:

    $-A_0*(1+i)^T$

  - Aus der Anlage der Zahlungen Z_t erhält man in T:

    $+Z_1*(1+i)^{T-1}$

    $+Z_2*(1+i)^{T-2}$

    …

    $+ Z_{T-1}*(1+i)$

    $+ Z_T$

Tabellerisch

	t	t+1	t+2	…	T-1	T
IO	$-A_0$	Z_1	Z_2	…	Z_{T-1}	Z_T

	t	t+1	t+2	…	T-1	T
Kredit	A_0					$-A_0*(1+i)^T$
Anlage 1		$-Z_1$				$Z_1*(1+i)^{T-1}$
Anlage 2			$-Z_2$			$Z_2*(1+i)^{T-2}$
Anlage T-1					$-Z_{T-1}$	$Z_{T-1}*(1+i)$
Saldo	0	0	0	…	0	Z_T + Endwert von Zahlungen bevor T

$$EW(i) = \underbrace{-A_0\cdot(1+i)^T + Z_1\cdot(1+i)^{T-1} + Z_2\cdot(1+i)^{T-2} + \ldots + Z_{T-1}\cdot(1+i)}_{EW\ von\ Zahlungen\ bevor\ T} + Z_T$$

Der klassische Endwert (3)

- Gesamtergebnis in T:

  EW(i)

  $= -A_0*(1+i)^T + Z_1*(1+i)^{T-1} + Z_2*(1+i)^{T-2} + \ldots + Z_{T-1}*(1+i) + Z_T$

- In den Zeitpunkten t=0,t=1,…,t=T-1 hat man per Saldo jeweils genau eine Zahlung von Null.
- Im Zeitpunkt T erhält man den „Endwert“ als Saldo.

Graphik: Kapitalwert vs. Endwert

t=0	t=1	t=2	…	t=T-1	t=T
$-A_0$	$+Z_1$	$+Z_2$	…	$+Z_{T-1}$	$+Z_T$

Entnahme KW:

Δ_{KW}	0	0	…	0	0

Entnahme EW:

0	0	0	…	0	Δ_{EW}

Der klassische Endwert als Entscheidungskriterium

- Ein einzelnes IO ist dann vorteilhaft, wenn es einen positiven Endwert hat.
- Bei konkurrierenden IOs wird das IO mit dem höchsten positiven Endwert gewählt.
- Bei kombinierbaren IOs werden alle Objekte mit positivem Endwert gewählt.

Aufgabe

- (Übungsblatt 2, 2.2)

Klassischer Kapitalwert und klassischer Endwert

- Durch Ausklammern erkennt man:

$$EW(i)$$
$$= -A_0*(1+i)^T + Z_1*(1+i)^{T-1} + Z_2*(1+i)^{T-2} + \ldots + Z_{T-1}*(1+i) + Z_T$$
$$= (1+i)^T *\{-A_0 + Z_1/(1+i) + Z_2/(1+i)^2 \ldots + Z_T/(1+i)^T\}$$
$$= (1+i)^T *KW(i)$$

- Kurz:

$$EW(i) = (1+i)^T *KW(i)$$

Aufgabe

- (Aufgabensammlung)

Konsequenz: Äquivalenz von klassischem Kapital- und Endwert

- Da Zinsen niemals negativ sind, ist $(1+i)^T > 0$.
- Somit gilt für zwei Investitionsobjekte IO_1 und IO_2 stets:

$$KW(IO_1,i) > KW(IO_2,i)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$EW(IO_1,i) > EW(IO_2,i)$$

- Die beiden Beurteilungskriterien sind also <u>äquivalent</u> und führen zu den gleichen Entscheidungen.

Bar- und Endwerte von Zahlungsströmen mit konstanten Zahlungen

- Gegeben sei eine Zahlungsreihe mit:

  $Z_t = Z$, $t = 1, \ldots, T$

- Verbal: in den Zeitpunkten t=1 bis t=T sind die Zahlungen jeweils gleich hoch.
- Weiterhin gelte auch:

  $i_t = i$, $t = 1, \ldots, T$

- Wie lassen sich Bar- und Endwert einer solchen Zahlungsreihe berechnen?

Barwert bei gleich hohen Zahlungen: $Z_t = Z$, $t=1,\ldots,T$

- Es gilt dann:

  $BW(i) = Z_1/(1+i) + Z_2/(1+i)^2 + \ldots + Z_T/(1+i)^T$

  $= Z/(1+i) + Z/(1+i)^2 + \ldots + Z/(1+i)^T$

  $= Z * \{1/(1+i) + 1/(1+i)^2 + \ldots + 1/(1+i)^T\}$

  $= Z * RBWF(i,T)$

  Definition: „Rentenbarwertfaktor“:

  $RBWF(i,T)$

  $:= \{1/(1+i) + 1/(1+i)^2 + \ldots + 1/(1+i)^T\}$

Endwert bei gleich hohen Zahlungen: $Z_t = Z$, $t=1,\ldots,T$

- Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
&EW(i) \\
&= Z_1*(1+i)^{T-1} + Z_2*(1+i)^{T-2} + \ldots + Z_{T-1}*(1+i)^1 + Z_T \\
&= Z*(1+i)^{T-1} + Z*(1+i)^{T-2} + \ldots + Z*(1+i)^1 + Z \\
&= Z*\{(1+i)^{T-1} + (1+i)^{T-2} + \ldots + (1+i)^1 + 1\} \\
&= Z*REWF(i,T)
\end{aligned}
$$

Definition: „Rentenendwertfaktor“:

$$
\begin{aligned}
&REWF(i,T) \\
&:= (1+i)^{T-1} + (1+i)^{T-2} + \ldots + (1+i)^1 + 1
\end{aligned}
$$

Rentenendwertfaktor und Rentenbarwertfaktor – kompaktere Darstellung

- Es gilt:

$$RBWF(i,T) = \frac{(1+i)^T - 1}{(1+i)^T \cdot i}$$

$$REWF(i,T) = \frac{(1+i)^T - 1}{i}$$

- Also gilt auch:

$$RBWF(i,T) * (1+i)^T = REWF(i,T)$$

Einschub – eine nützliche Formel, Herleitung von REWF und RBWF (1)

- Anfang: nicht klausurrelevanter Abschnitt (Herleitung der Formeln)
- Es gilt:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1} = (1-q^n)/(1-q)$$

- Herleitung:

$$S(q,n-1):=1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}$$
$$= 1+q*\{1+q+q^2+\ldots+q^{n-2}\}$$
$$= 1+q*\{1+q+q^2+\ldots+q^{n-2} +q^{n-1}\} - q^n$$
$$=1+q*S(q,n-1) - q^n$$

Einschub – eine nützliche Formel, Herleitung von REWF und RBWF (2)

- Kurz:

$$S(q,n-1)=1+q*S(q,n-1) - q^n$$

- Auflösen nach S(q,n-1):

$$S(q,n-1) = \{1 - q^n\}/(1-q)$$

- Dies liefert die behauptete Gleichung.

Einschub – eine nützliche Formel, Herleitung von REWF und RBWF (3)

- Es gilt:

$$\mathrm{REWF}(i,T)$$

$$= (1+i)^{T-1} + (1+i)^{T-2} + \ldots + (1+i)^{1} + 1$$

$$= q^{T-1} + q^{T-2} + \ldots + q + 1$$

$$= S(q, T-1)$$

- Mit:

$$q = (1+i)$$

Einschub – eine nützliche Formel, Herleitung von REWF und RBWF (3)

- Somit folgt:

$$\color{red}{REWF(i,T)}$$
$$= S(1+i,T-1)$$
$$= \{1 - (1+i)^n\}/(1-(1+i))$$
$$= \{ (1+i)^n - 1\}/i$$

- Den RBWF kann man mit $q=1/(1+i)$ ebenfalls leicht berechnen:

$$\color{green}{RBWF(i,T)}$$
$$:= \{q+ q^2+ \ldots+q^T\} = q*S(q,T-1)$$

Einschub – eine nützliche Formel, Herleitung von REWF und RBWF (4)

- Den RBWF kann man mit $q=1/(1+i)$ ebenfalls leicht berechnen:

  RBWF(i,T)

  $:= \{q+ q^2+ \ldots+q^T\} = q*S(q,T-1)$
- (Nach einigen einfachen Umformungen erhält man die behauptete Formel für den RBWF.)
- Ende nicht klausurrelevanter Abschnitt.

Zwischenfazit: Bar- und Endwerte im Fall Z_t=Z, t=1,…,T

- Merke:

$$BW(i,T,Z) = Z*RBWF(i,T)$$

$$EW(i,T,Z) = Z*REWF(i,T)$$

- (Man beachte: Zahlungen fallen dabei nur von t=1 bis t=T an. Zahlungen in t=0 sind in diesen Formeln nicht berücksichtigt)

Aufgabe

- (Aufgabensammlung)

Die klassische Annuitäten

Definition - Annuität

- Eine Annuität ist ein Zahlungsstrom mit konstanten Zahlungen Z in t=1,…,T.

t=1	t=2	…	t=T
+Z	+Z	…	+Z

Annuitätenmethode und Kapitalwert

- Der Kapitalwert kann interpretiert werden als der Betrag, den man in t=0 entnehmen kann (finanziert durch das IO).
- Bei der Annuität entnimmt man einen konstanten Betrag in t=1,…,T.

	Entnahme t=0	Entnahme t=1	Entnahme t=2	Entnahme t=3
KW	+291,80	0	0	0
Annuität	0	+107,21	+107,21	+107,21

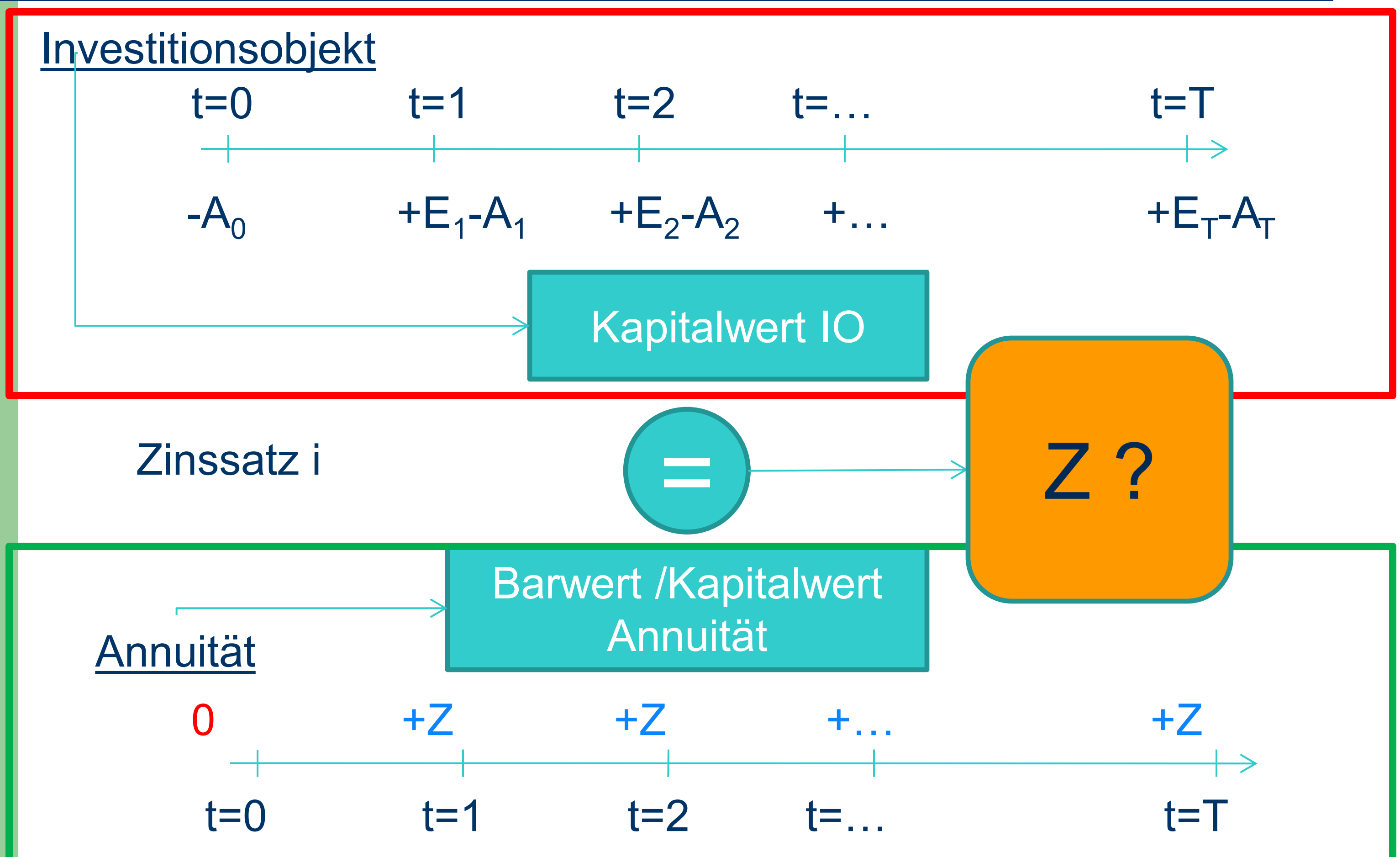
Grundidee

- Gegeben seien
  - Zwei prinzipiell beliebige, konkurrierende IOs.
  - der Zinssatz i.
- Idee:
  - Rechne die IOs um in Annuitäten…
  - … mit gleicher Laufzeit…
  - … und Anfangszahlung $A_0 = 0$.
  - Wähle das IO mit der höchsten Annuitätenzahlung Z!

Vorgehensweise (1)

- Wir kombinieren die Zahlungen aus dem Investitionsobjekt…
- …mit Banktransaktionen
  - also Kreditaufnahme bzw. Anlage von Zahlungen aus dem Investitionsobjekt
- … so dass eine Annuität entsteht:
  - mit Laufzeit T
  - mit einer Anfangsauszahlung in Höhe von Null
- … und am Ende der Periode T weder eine Forderung noch eine Verbindlichkeit bei der Bank verbleibt.

Vorgehensweise (2)



Vorgehensweise (3)

1. Berechne Kapitalwert des IOs
2. Barwert Annuität (T) = Z*RBWF(i,T)
3. Barwert Annuität = Kapitalwert IO

Barwert Annuität

$$= Z * RBWF(i,T)$$

$$= KW^{IO}$$

$$\Leftrightarrow Z = KW^{IO} / RBWF(i,T)$$

$$= KW^{IO} * \{1 / RBWF(i,T)\}$$

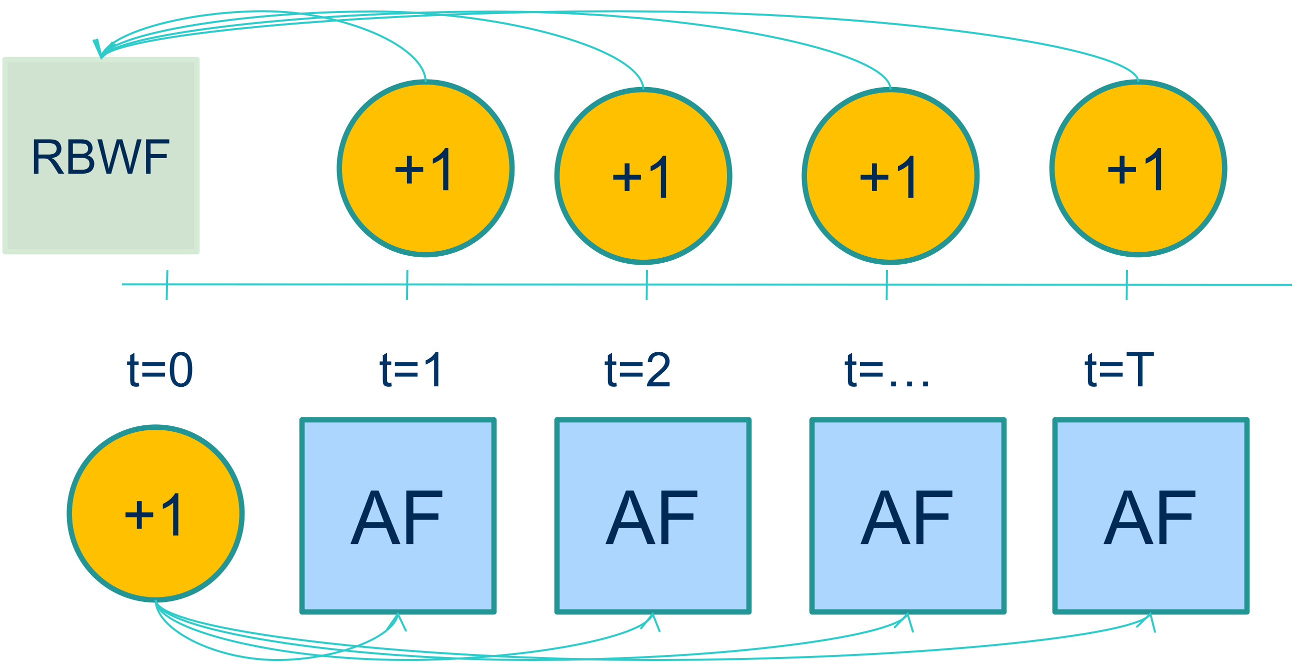
$$\equiv KW^{IO} * ANF(i,T)$$

Annuitätenfaktor und Rentenbarwertfaktor (1)

- Definiere: „Annuitätenfaktor“ (oder auch: „Wiedergewinnungsfaktor“)

$$ANF(i,T) := 1/RBWF(i,T)$$

Annuitätenfaktor und Rentenbarwertfaktor (2)



AF = „Annuitätenfaktor“

Beispiel (1)

- Wir verwenden einen Zinssatz von i = 5% und die folgenden IOs:

	t=0	t=1	t=2	t=3
IO_1	-1.000	+250	+400	+800
IO_2	-1.000	+700	+400	+250

1. Schritt: Berechnung der Kapitalwerte

- $BW(IO_1)$

  $=250/(1{,}05)+400/(1{,}05)^2+800/(1{,}05)^3$

  $= 1.291{,}98$
- $KW(IO_1)= 1.291{,}98 - 1000 = \underline{291{,}98}$
- $BW(IO_2)$

  $=700/(1{,}05)+400/(1{,}05)^2+250/(1{,}05)^3$

  $= 1.245{,}44$
- $KW(IO_2)= 1.245{,}44 - 1.000 = \underline{245{,}44}$

2. Schritt: Berechnung einer Annuität mit gleichem Kapitalwert (1)

- Nun sucht man eine Zahlungsreihe Z (t=1…, bis t=T) mit Anfangsauszahlung 0, die den gleichen Kapitalwert/Barwert wie das jeweilige IO hat.
- Es muss gelten:

$$KW_{IO} = Z/(1+i)+\ldots+Z/(1+i)^T$$

$$=Z*[1/(1+i)+\ldots+1/(1+i)^T]$$

  – $\Leftrightarrow Z = KW_{IO}/[1/(1+i)+\ldots+1/(1+i)^T]$

$$= KW_{IO}*1/RBWF(i,T)$$

$$\equiv KW_{IO}*\text{“Annuitätenfaktor(i,T)“}$$

Beispiel (2)

- IO1:
  - $KW(IO_1,5\%) = 291{,}98$
    $= Z_{IO1} * [1/(1{,}05)+1/(1{,}05)^2+ 1/(1{,}05)^3]$
  - $\Leftrightarrow Z_{IO1} = 291{,}98/[1/(1{,}05)+1/(1{,}05)^2+ 1/(1{,}05)^3]$
    $= 291{,}98/2{,}723248 \approx \underline{107{,}21}$
- IO2:
  - $KW(IO_2,5\%) = 245{,}44$
    $= Z_2 * [1/(1{,}05)+1/(1{,}05)^2+ 1/(1{,}05)^3]$
  - $\Leftrightarrow Z_2 = 245{,}44/2{,}723248 \approx \underline{90{,}13}$

3. Schritt

- Bei konkurrierenden IOs wählt man das IO mit der höheren (positiven) Annuität.
- Ein einzelnes IO ist dann vorteilhaft, wenn die Annuität positiv ist.

Beispiel (3)

- Hier würde man IO_1 wählen:
  - $Z_1 = 107{,}21 > Z_2 = 90{,}13$
  - Zudem gilt: $Z_1 > 0$
- Man kommt zur gleichen Entscheidung wie bei Verwendung des Kapitalwertes:
  - $KW(IO_1{,}5\%) = 291{,}98 > KW(IO_2{,}5\%) = 245{,}44 > 0$

Probe (1)

- Umwandlung von IO_1 in eine Annuität, i=5%:

t	IO1	Kreditausnahme (+) Kreditrückzahlung (-)	Saldo	Kontostand
t=0	-1.000	+1.000	0	-1.000
t=1	+250	-142,79	107,21	-907,21 = -1000*1,05 + 142,79
t=2	+400	-292,79	107,21	-659,78
t=3	+800	-692,79	107,21	0,021 ≈ 0

Probe (2)

- Umwandlung von IO_2 in eine Annuität, i=5%:

t	IO1	Banktransaktionen: Kreditaufnahme (+) Kreditrückzahlung (-)	Saldo	Kontostand
t=0	-1.000	+1.000	0	-1.000
t=1	+700	-609,87	90,13	-440,13
t=2	+400	-309,87	90,13	-152,27
t=3	+250	-159,97	90,13	-0,0135 ≈ 0

Vergleich mit dem Kapitalwert (1)

- Die Annuität eines IOs erhält man aus dem Kapitalwert gemäß:

  $\text{Annuität}_{IO1} = KW(IO_1,i)/RBWF(i,T)$

  $\text{Annuität}_{IO2} = KW(IO_2,i)/RBWF(i,T)$

- Der Faktor $RBWF(i,T)$ ist aber für alle IOs identisch und positiv.
- Es gilt:

$$KW(IO_1) > KW(IO_2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{Annuität}(IO_1) > \text{Annuität}(IO_2)$$

Fazit: klassischer Kapitalwert, Endwert und klassische Annuität

- Ergebnis:
- Alle drei Verfahren kommen stets zur gleichen Beurteilung von Investitionsobjekten!
- Sie haben lediglich eine etwas andere ökonomische Interpretation.

Aufgabe

- (Aufgabensammlung)